UYGULAMALAR

Örnek (Ki-kare dağılımı): X rastgele değişkeni Standart Normal dağılıma sahip olsun. Y = X^2 rastgele değişkeninin dağılımını Değişken Değiştirme Tekniğini kullanarak bulunuz?

Çözüm: X ~ N(0,1) ise Y=X^2 rastgele değişkeninin dağılımı 1 serbestlik dereceli Ki-Kare dağılımıdır. X ~ N(0,1) ise Y = $X^2 \sim \chi^2_{(1)}$ dir.

Örnek (F dağılımı): X_1 ve X_2 sırasıyla r_1 ve r_2 serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına sahip bağımsız rastgele değişkenler olsun ($X_1 \sim \chi^2_{(r_1)}$, $X_2 \sim \chi^2_{(r_2)}$ ve X_1 ve X_2 bağımsız).

$$X = \frac{X_1/r_1}{X_2/r_2}$$

rastgele değişkeninin r_1 ve r_2 serbestlik dereceli F dağılımına sahip olduğunu Değişken değiştirme tekniğini kullanarak gösteriniz? (U=X_2 yardımcı dönüşümünü kullanınız)

Çözüm:

X_1 *ve* X_2 rastgele değişkenleri bağımsız olduğundan X_1 *ve* X_2 nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x_1, x_2) = f(x_1).f(x_2)$$

eşitliğinden

$$f_{X_1,X_2}^{(x_1 x_2)} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)2^{\frac{r_1+r_2}{2}}} x_1^{\frac{r_1}{2}-1} x_2^{\frac{r_2}{2}-1} e^{-\frac{x_1}{2}} e^{-\frac{x_2}{2}} \quad , \quad 0 < x_1 < \infty \quad 0 < x_1 < \infty$$

olur.

X ve U rastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$f_{X,U}(x,u)$ = f ($x_1 = w_1(x,u)$, $x_2 = w_2(x,u)$) . $|J|$

$$f(x,u) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)2^{\frac{r_1+r_2}{2}}} \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{2}} . x^{\frac{r_1}{2}-1} . u^{\frac{r_1+r_2}{2}-1} . e^{-\frac{u}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}x+1\right)}, & 0 < u < \infty \ , 0 < x < \infty \\ 0, & d.d \end{cases}$$

olarak bulunur. Buradan X rastgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \int_{u=0}^{\infty} f_{X,U}(x,u)\, du$$

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) . \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{2}} . x^{\frac{r_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)\left(\frac{r_1}{r_2}x+1\right)^{\frac{r_1+r_2}{2}}} \quad , \quad 0 < x < \infty$$

şeklinde bulunur. Elde edilen bu olasılık fonksiyonu r_1 ve r_2 serbestlik dereceli F dağılımına ait olduğundan $X \sim F_{r_1,r_2}$ ‘dir.

Örnek (T dağılımı) : X_1 standart normal dağılıma sahip ve X_2 de r serbestlik dereceli Ki-kare dağılımına sahip bağımsız rastgele değişkenler olsun (X_1~N(0,1) , $X_2 \sim \chi^2_{(r)}$ ve X_1 ve X_2 *bağımsız* olsun).

$$T = \frac{X_1}{\sqrt{\frac{X_2}{r}}}$$

rastgele değişkeninin dağılımını Değişken değiştirme tekniğini kullanarak bulunuz?
(U = X_2 yardımcı dönüşümünü kullanınız)

Çözüm:

$X_1 \sim$ N (0,1) ve $X_2 \sim \chi^2_{(r)}$ ise X_1 *ve* X_2 rastgele değişkenleri bağımsız olduğundan X_1 *ve* X_2 nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} . \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)2^{\frac{r}{2}}} x_2^{\frac{r}{2}-1} . e^{-\frac{x_2}{2}} \ , -\infty < x_1 < \infty \ , 0 < x_2 < \infty$$

şeklindedir.

T ve U rastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(t,u) = f\big(x_1 = w_1(t,u)\,,\ x_2 = w_2(t,u)\big)\,.\,|J|$$

$$g(t,u) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)2^{\frac{r}{2}}\sqrt{2\pi}}\,.\,e^{-\frac{ut^2}{2r}-\frac{u}{2}}\,.\,u^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}.\,r^{-\frac{1}{2}}, & 0 < u < \infty\ ,-\infty < x < \infty \\ 0, & d.d \end{cases}$$

bulunur. T rastgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(t) = \int_{u=0}^{\infty} g(t,u)\,du$$

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\sqrt{r\pi}}\,.\left(1+\dfrac{t^2}{r}\right)^{-\frac{r+1}{2}}, & -\infty < t < \infty \\ 0, & d.d \end{cases}$$

bulunur. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonu r serbestlik dereceli T dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğundan T $\sim t_{(r)}$ ‘dir.

Kaynaklar

(1) Akdi, Y. (2010) Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.

(2) Hogg, R. V. And Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(3) Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.

(4) Hogg, R. V. And Tanis, E. A. (1993) Probability and Statistical Inference. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(5) Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.